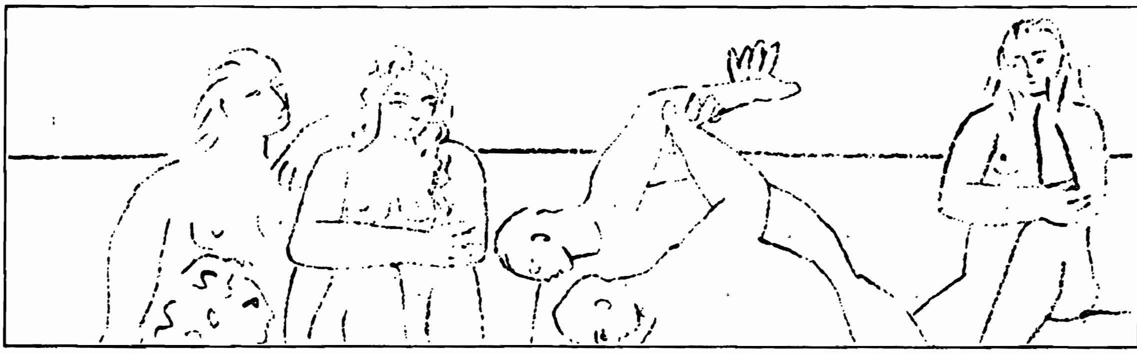

EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS ESTADO ACTUAL DE LAS INVESTIGACIONES

VICENTE BERMEJO (*)
M. OLIVA LAGO

EL estudio psicológico de las operaciones aritméticas elementales se inicia desde principios de siglo (Arnett, 1905; Browne, 1906; Brownell, 1928; Bushwell y Judd, 1925); no obstante, sólo en fechas recientes se aprecia el surgimiento de un paradigma general, que aúna diferentes modelos sobre los procesos cognitivos utilizados por los niños durante la realización de tareas aritméticas concretas, y el modo en que cambian dichos procesos con el transcurso del tiempo. Según Brown (1970), los orígenes de este paradigma arrancarían de dos fuentes: de la simulación de los procesos cognitivos y de la obra de Piaget. Y desde ambas orientaciones se afirma que los procesos cognitivos no pueden observarse directamente, por lo que el investigador se ve obligado a inferir tales procesos, utilizando: a) modelos de simulación (De Corte y Verschaffel, 1985; Greeno, Riley y Gelman, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983; Siegler y Robinson, 1982); b) aportaciones acerca de los estadios evolutivos (Carpenter y Moser, 1982, 1983; Starkey y Gelman, 1982; Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983); c) análisis de la influencia del marco cultural (Saxe, 1982; Hatano, 1982); d) análisis de los procesos de instrucción (Nesher, 1982); e) modelos de procesamiento cognitivo (Case, 1978, 1982; Collis, 1982).

Una de las manifestaciones del consenso que comienza a surgir en torno a este paradigma, se refiere a los métodos utilizados para investigar los aspectos fundamentales de las operaciones aritméticas elementales, limitándose predominantemente al uso de la entrevista clínica (Ginsburg, Kossan, Schwartz y Swanson, 1983). Aunque Cobb y Steffe (1983), Davydov y Andronov (1980) y Resnick (1981) utilizan el "experimento de enseñanza", no obstante éste consiste esencialmente en una ampliación de la entrevista clínica. Otra manifestación de dicho consenso radica en el reconocimiento de la importancia de las habilidades numéricas básicas, tales como el conteo, la estimación y la percepción de la cantidad numérica, para especificar los procesos cognitivos responsables del aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales. La revalorización del conteo, por ejemplo, como un elemento relevante en el estudio de los procedimientos utilizados por los niños en la resolución de problemas aditivos, es el fruto de numerosas investigaciones (Gelman y Gallistel, 1978; Fuson, 1982; Fuson y Richards, 1979; Steffe, Thompson y Richards, 1982; Steffe y col., 1983). En ellas se pone en entredicho la postergación que ha sufrido dicha habilidad, situándola en un primer plano. En las páginas que siguen trataremos de compendiar las aportaciones más significativas que se han hecho en torno a la adquisición y aprendizaje de las nociones matemáticas elementales, tales como el conteo, la cardinalidad, el número, la adición, etc., resaltando aquellos aspectos que, a nuestro entender son más originales o pueden resultar más útiles con respecto a la práctica educativa.

LA POSICION CLASICA DE PIAGET

Piaget (Gréco, Grize, Papert y Piaget, 1960; Piaget, 1983; Piaget y Szeminska, 1941) es uno de los primeros autores que analiza empíricamente y en profundidad el origen y desarrollo del número y de otras

(*) Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Facultad de Psicología de la Universidad Complutense de Madrid. I.C.E. Universidad Complutense de Madrid.

nociones matemáticas del niño. Con respecto al concepto de número, hay tres teorías que pretenden determinar su origen: 1, la teoría cardinal; 2, la teoría ordinal, y 3, la teoría cardinal-ordinal de Piaget. La teoría cardinal es una traducción literal de la teoría de Frege-Russell (1884-1903) en términos psicológicos; por lo que la explicación de los orígenes psicológicos del número se convierte en una tarea análoga a la de explicar cómo llegan los niños por primera vez a comprender el número cardinal. La teoría ordinal (Brainerd, 1973a, 1973b, 1973c) se inspira en la aproximación relacional del número. Dicha teoría asume que el número hace referencia a los términos de las relaciones asimétricas-transitivas de las progresiones que generan tales relaciones. En consecuencia, el origen psicológico del número se identifica con el origen psicológico del número ordinal. Por último, la teoría cardinal-ordinal de Piaget, como su propio nombre indica, hace referencia tanto al significado ordinal como cardinal del concepto de número, combinando la dimensión clasificatoria y relacional del mismo. Piaget considera inadecuado sostener que el sistema de los números naturales se basa exclusivamente bien en los números ordinales, bien en los números cardinales, ya que tienen que identificarse tanto con los unos como con los otros. Este autor (1983) afirma que la construcción de los números cardinales no puede explicarse, como creían Whitehead y Russell (1910-13), por el simple establecimiento de la correspondencia uno a uno entre clases equivalentes, ya que la correspondencia que ellos utilizan introduce implícitamente la unidad y, por lo tanto, el número, lo que convierte su argumento en circular. Cuando se trata con conjuntos finitos, los números cardinales no pueden disociarse de los ordinales y están sujetos a tres condiciones: A) abstracción a partir de las cualidades, lo que hace que todos los objetos individuales sean equivalentes y por lo tanto: 1 = 1 = 1; B) el orden es necesario para distinguir los objetos entre sí; C) la inclusión de (1) en (1 + 1), después de (1 + 1) en (1 + 1 + 1), etc. Por tanto, el número resulta de la síntesis de la clasificación de objetos equivalentes y del orden de los mismos, de modo que mediante un proceso iterativo se cuantifica, dando lugar a la serie de los números enteros.

En cuanto a la evolución de la cardinación y la ordinación (Piaget y Szeminska, 1941), distinguen tres fases: en la primera, la seriación, que es pre-ordinal (el niño no comprende espontáneamente el orden progresivo de los elementos), se corresponde con la primera etapa de la cardinación, en la que no hay ninguna conservación de las cantidades —sean éstas continuas o discontinuas—. Son dos las características que comparten: la naturaleza global y la dependencia de la experiencia perceptiva inmediata. En la segunda, la ordinación (basada en la seriación y correspondencia intuitiva y con vacilaciones) se corresponde con el comienzo de la conservación de las cantidades, pero sólo para determinadas transformaciones, como la correspondencia término a término y la reproducción de las cantidades por medio del análisis exacto de las figuras, aunque la equivalencia no es durable. En esta segunda etapa, el niño no opera todavía, aunque sea capaz de llevar a cabo un análisis correcto no enteramente independiente de la percepción. Por último, en la tercera etapa, la ordinación y la cardinación pueden equipararse tanto por sus estructuras como por sus resultados; en ambos casos triunfa la operación sobre la intuición. La composición operatoria acaba por sobreponerse a la constatación perceptiva, o más exactamente aquélla dirige y supedita a ésta. En la primera etapa no existe todavía coordinación entre el proceso de carácter ordinal y los procesos de carácter cardinal. En la segunda, las relaciones son más complejas, ya que señalan el comienzo de la coordinación entre ambas estructuras, aunque sólo a nivel intuitivo. En la terceta etapa, el niño resuelve correctamente todas las tareas que se le plantean, bien al pedirle que determine un valor cardinal por medio de un rango concreto, bien al solicitarle que averigüe un rango particular a partir del valor cardinal. Comprende, por tanto, la relación existente entre la ordinación y la cardinación.

Con respecto a la adición, se trata de una operación que aúna las partes en un todo. Es decir, la adición es una operación reversible que se constituye cuando, por una parte, los sumandos se reúnen en un todo y, por otra, cuando dicho todo se considera constante (invariante) con independencia de las diversas particiones que puedan efectuarse. Ahora bien, para que el todo sea conceptualizado como constante, el niño tiene que poseer la conservación operatoria. Piaget y Szeminska (1941) utilizan tres técnicas para estudiar la composición aditiva: a) identidad del todo a pesar de las distintas composiciones aditivas de sus partes; b) igualación de dos cantidades, y c) partición del todo en dos partes equivalentes. Los resultados empíricos obtenidos muestran la existencia de una etapa inicial en la que no hay composición aditiva, una etapa intermedia en la que se manifiesta una composición aditiva intuitiva y una etapa final en la que se da una composición aditiva real, definida por la invarianza del todo y la reversibilidad de las operaciones que la constituyen. De modo más explícito, en la primera etapa el niño se rige por las relaciones perceptivas, llegando a conclusiones erróneas al comparar entre sí las diversas partes de dos conjuntos equivalentes, o al ignorar que los elementos dispuestos ante él constituyen un todo constante y que, por lo tanto, los elementos sustraídos a una de las partes son adicionados a la restante. De todo ello se desprende que en esta primera etapa no hay ni adición ni sustracción auténticas, sino tan sólo acciones empíricas, cuyos efectos desconoce a priori. La segunda etapa supone un paso más hacia la consecución de una composición aditiva, puesto que las totalidades se estructuran mejor gracias a la intuición espacial. No obstante, dada la ausencia de conservación operatoria, no puede haber un todo que permanezca constante a lo largo de las múltiples particiones que pueden aplicarse. Finalmente, en la tercera etapa, el niño puede descomponer una totalidad en sus partes o realizar el proceso inverso (aunar las partes en un todo), ya que las igualdades son estables, gracias a la conservación resultante de una composición aditiva móvil y reversible.

LA RELEVANCIA DEL CONTEO

En los estudios tradicionales acerca de la competencia cognitiva de los preescolares se utiliza habitualmente el análisis transversal, es decir, la comparación entre los resultados obtenidos por dichos niños y los conseguidos por niños mayores. En consecuencia, lo único que se obtiene es una larga lista de "incompetencias" por parte de los más pequeños, pero no un conocimiento directo de su desarrollo cognitivo, entendiéndose éste además como un proceso de todo o nada. En la actualidad, no suele sostenerse este tipo de interpretación, ya que la incapacidad para solventar correctamente una tarea determinada no significa necesariamente ausencia total de conocimiento sobre la noción estudiada. Desde aquella óptica, se defendía que los niños pequeños no poseían conocimiento alguno del concepto de número, considerando el conteo como resultado de una simple rutina memorística. Recientemente, no pocos autores (Gelman, 1972; Gelman, 1982; Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983; Greeno, Riley y Gelman, 1984), se oponen a esta orientación, argumentando que los procesos cognitivos implicados en el conteo preparan la adquisición de habilidades numéricas más complejas.

Gelman y Gallistel (1978) hablan de habilidades numéricas de abstracción y de razonamiento. Las primeras permiten al niño determinar la cantidad numérica específica o relativa, y las segundas consisten en juicios acerca de las transformaciones, las relaciones entre conjuntos y los efectos de la aplicación sucesiva de varias operaciones. Las habilidades de razonamiento sólo pueden ser aplicadas, si previamente el niño ha logrado una representación numérica del conjunto; para lo cual dispone de dos medios: el conteo y la percepción inmediata de la cantidad. El éxito en la primera tarea supone el dominio de cinco principios fundamentales: a) el principio de correspondencia uno-a-uno; b) el de orden estable; c) el principio de cardinalidad; d) el de abstracción, y e) el principio de irrelevancia del orden. Ahora bien, desde el punto de vista evolutivo, los niños de dos años no utilizan aún la secuencia numérica convencional, pero sí parecen cumplir los principios de correspondencia uno-a-uno y de orden estable. Los trabajos de Fuson y Richards (1979) confirman estos resultados, al hablar de la utilización de "listas no estándar". El proceso evolutivo a lo largo de los tres, cuatro y cinco años se manifiesta en el dominio progresivo de las adquisiciones anteriores y en el inicio y desarrollo paulatino del principio de cardinalidad. Así, el estudio de Groen y Resnick (1977) confirma que el conteo de los niños va más allá de la mera rutina memorística, encontrando que hacia los cuatro años y seis meses son capaces de inventar algoritmos de conteo.

En cuanto a la interacción entre las habilidades de abstracción del número y las habilidades de razonamiento numérico, la hipótesis de Gelman (1972) y Gelman y Gallistel (1978) defiende que los niños pequeños no son capaces de razonar aritméticamente sobre cantidades que no pueden representarse de modo preciso: pero sí podrían contar sin dificultad cantidades pequeñas. Por tanto, mientras que para Piaget la correspondencia uno-a-uno constituye psicológicamente la base primitiva para establecer un juicio de igualdad numérica, Gelman y Gallistel consideran que esta tarea puede realizarse con anterioridad mediante el conteo. En esta línea, Gelman (1982) intenta mostrar en un experimento de entrenamiento sobre la conservación del número, con niños de tres y cuatro años, que la cardinalidad constituye el factor fundamental en la adquisición de esa noción. No obstante, los resultados obtenidos son poco convincentes, ya que no sólo muestran una cierta ambigüedad, sino que el mismo diseño adolece de un riguroso control de variables.

Otro aspecto de la teoría de Gelman, que no queremos dejar en el tintero aunque proceda de Rozin (1976), es la diferenciación que establece entre conocimiento implícito y explícito. Gelman y Gallistel (1978) afirman que el hecho de que incluso niños de dos años y seis meses puedan manifestar en sus ejecuciones los tres primeros principios de conteo, descritos anteriormente, no implica que dispongan de un conocimiento explícito de los mismos. Tampoco significa que el desarrollo a partir de dicha edad sea trivial; al contrario, se manifestará un gran avance tanto en el número de elementos que pueden contar, como en la amplitud de la secuencia de numerales que pueden recordar, en el modo de coordinar los diversos componentes del proceso de conteo, etc. En efecto, Greeno, Riley y Gelman (1984), en el análisis que llevan a cabo para caracterizar la comprensión implícita de los tres primeros principios, indican que la competencia atribuida a los niños no supone que apliquen tales principios en todas las tareas o situaciones en que son necesarios:

"el éxito en las complejas tareas piagetianas requiere un desarrollo conceptual en el que la comprensión de los conceptos cuantitativos se haga más explícita, flexible y robusta"; entendiendo por flexibilidad la habilidad para generar procedimientos que consigan alcanzar la meta para la que son generados en diversas actuaciones, y por robustez, la habilidad para adaptar un procedimiento a las exigencias impuestas por la tarea. Gelman y Meck (1983) insisten en esta misma diferenciación entre conocimiento implícito y explícito, afirmando que, en ocasiones, el conocimiento implícito de la cardinalidad aparece oculto debido a que las dificultades existentes en la tarea propuesta sirven de distractor.

LA TEORIA DEL CONOCIMIENTO PARCIAL

La observación de dos hechos significativos van a dar pie a Wilkinson (1982a, 1982b, 1984) para la construcción de la teoría del conocimiento parcial. El primero se refiere a la edad en que los niños manifiestan el conocimiento de un concepto o exhiben una habilidad. Esta edad puede variar sustancialmente según el tipo de tarea solicitada para evaluar tales conceptos o habilidades (ver Miller, 1976; Trabasso, 1977; Wilkinson, 1976). Y, en segundo lugar, el hecho de que durante el período de adquisición de un concepto o habilidad los niños suelen dudar y vacilar entre el éxito y fracaso en la realización de las tareas propuestas, de modo que puedan resolver correctamente algunas pruebas, mientras fracasan en otras que son completamente similares (Brainerd, 1979; Flavell, 1982; Siegler, 1981). Estas dos observaciones, fácilmente constatables en el ámbito evolutivo, ponen de relieve la insuficiencia explicativa de los modelos tradicionales y sugiere a Wilkinson la formulación de una teoría que dé cuenta de las fases iniciales y de la transición en la adquisición de cualquier concepto.

Aunque la teoría del conocimiento parcial puede aplicarse en cualquier ámbito del desarrollo cognitivo; se presta, no obstante, de manera especial para ilustrar la adquisición de la habilidad de contar, ya que el niño suele pasar varios meses, quizás años, contando correctamente a veces, y otras veces erróneamente (Wilkinson, 1984). Desde esta postura, el conocimiento parcial puede ser *restrictivo* o *variable.* El primero se da cuando el niño responde bien o mal de manera consistente, como cuando cuenta correctamente hasta cinco, pero falla siempre que tiene que contar conjuntos más numerosos. En cambio, el conocimiento variable se manifiesta cuando éxito y error se suceden frecuentemente. Ahora bien, estos dos tipos de conocimiento no están estrictamente delimitados; sino que más bien habría que considerarlos como los extremos de un continuo, en el que aparecen mezclados en proporciones variables. El predominio de uno u otro conocimiento se determina analizando la estabilidad de las respuestas emitidas por los sujetos.

Por otra parte, este modelo asume que en toda teoría sobre el desarrollo cognitivo debe considerarse la diada estructuras-procesos, a fin de tener en cuenta tanto la representación del conocimiento como el desarrollo del mismo. Según esto, en el conocimiento restrictivo la estructura cognitiva sería un algoritmo *unitario,* mientras que el proceso evolutivo sería la optimización o reforma ("amendment"). Así, el niño aplica el algoritmo codificado en su memoria como *un todo* para contar, desempeñando estas tareas correctamente. O bien, modifica dicho algoritmo, añadiendo en general nuevos procedimientos, para solventar tareas más complejas, como puede ser el contar con decenas (ver Siegler y Robinson, 1982). Con respecto al conocimiento variable, la estructura cognitiva está constituida por un conjunto de componentes modulares y el proceso evolutivo es el auto-control. Los primeros son unidades *separadas* de conocimiento que pueden organizarse en un algoritmo para realizar una tarea determinada, llegando a buen término dicha acción si la unión pretendida es la pertinente, o por el contrario, se fracasa si no se ha formado el algoritmo apropiado. El autocontrol permite la detección de errores y su corrección posible en rutinas más congruentes. Así, el niño puede no tener en cuenta el principio de estabilidad de la secuenciación de los numerales, equivocándose en el conteo; o bien, se percata de dicho error y lo aplica correctamente en la siguiente prueba.

En un experimento con niños de cuatro a cinco años, Wilkinson (1984) encuentra que los componentes cognitivos más importantes para el aprendizaje del conteo son la etiquetación, la partición y el stop. Igualmente, confirma la distinción entre conocimiento restrictivo y variable, proponiendo el coeficiente ω para medir matemáticamente el grado de estabilidad del conocimiento. De algún modo, como apunta el mismo autor, la metáfora de la equilibración propuesta por Piaget (1974), deja de ser tal para convertirse en una medida exacta. Sin compartir totalmente el optimismo mostrado por Wilkinson, entendemos que su esfuerzo teórico y matemático realizado con vistas a cuantificar el mismo proceso evolutivo, el problema capital y quizás, por ende, el más atractivo para todo psicólogo evolutivo, merece nuestro reconocimiento. Sin embargo, tenemos también que mostrar en la misma carta nuestra cautela con respecto a la viabilidad de las aportaciones más originales de este autor.

EL ESQUEMA PARTE-TODO

Hasta fechas relativamente recientes los estudios acerca del conocimiento aritmético de los niños se centraban fundamentalmente, bien en el conocimiento conceptual (Chi, 1978; Gentner, 1975; Stein y Trabasso, 1981), bien en el conocimiento de procedimiento o estrategias de resolución (Baylor y Gascon, 1974; Brown, 1978; Groen y Resnick, 1977). Sin embargo, hoy se resalta también la importancia de su interacción durante la resolución de tareas aritméticas. Desde esta óptica resulta obvia la relevancia del esquema parte-todo, ya que no sólo proporciona una representación adecuada de las tareas aditivas o de resta, sino que además permite incorporar elementos no explícitos en las mismas, asignar los valores correspondientes y facilitar de este modo la delimitación de la incógnita. En otras palabras, la comprensión de dicho esquema no sólo allana dificultades para determinar cuáles son los elementos relevantes del problema y las relaciones existentes entre ellos, sino que, además, facilita la selección de la operación adecuada y de las estrategias de solución. Dos líneas principales de investigación se han desarrollado en torno a este esquema. La primera se orienta hacia la explicación de los procesos cognitivos implicados en la solución de tareas aritméticas elementales, sea mediante la proposición de modelos fundados en el esquema parte-todo (Resnick, 1983), sea mediante el análisis de tareas diversas, que se suponen asentadas sobre los pilares de la relación parte-todo (Bermejo y Lago, 1986; Bermejo y Rodríguez, 1987, a y b próxima aparición). Y una segunda, de carácter más aplicativo, que utiliza dicho esquema para facilitar el aprendizaje de determinadas operaciones aritméticas elementales (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; De Corte y Verschaffel, 1981).

El esquema parte-todo ha sido utilizado principalmente para explicar el conocimiento subyacente a la competencia matemática de los niños, bien mediante modelos de simulación (Greeno, Riley y Heller, 1983; Kintsch y Greeno, 1985; Resnick, 1983), bien mediante el análisis de tareas (Bermejo y Lago, 1986; Bermejo y Rodríguez, 1987, a y b próxima aparición). Desde el primer punto de vista, destaca la posición de Resnick (1983) acerca del desarrollo de la comprensión del número. Esta autora sostiene que la comprensión del número por parte del niño arranca del esquema parte-todo, que sufriría diversas transformaciones a lo largo de la instrucción matemática formal. De este modo considera que los orígenes de este esquema se encontrarían en diversas situaciones de la vida cotidiana, en las que han de efectuarse particiones sin aludir a su valor cuantitativo. Supone igualmente que los niños, antes de iniciar su andadura escolar, ya disponen de un conocimiento, aunque rudimentario, de dicho esquema. Durante el período preescolar, la comprensión del número se limita al conteo y las comparaciones, pudiendo solucionar una considerable cantidad de problemas aritméticos mediante estas operaciones.

La aplicación sistemática del esquema parte-todo a la cuantificación se inicia en los primeros años de escuela, durante los cuales adquieren la noción de composición, según la cual un conjunto (el todo) puede ser descompuesto en distintas partes, cuya sumación recompone siempre el todo original.

Ahora bien, este limitado conocimiento conceptual, estructurado en forma de parte-todo, ha de ligarse a métodos de procedimiento para ser operativo. Así se ilustra en las operaciones de suma y resta y en las estrategias mentales de cálculo, ya que en ambos casos se supone implícitamente que los números están integrados por otros números. Un logro posterior permite la comprensión del sistema de base 10 que se obtiene a través de tres estadios evolutivos. En el primero, los números de dos dígitos son interpretados dentro del esquema parte-todo como integrados por valores de decenas y valores de unidades, debiendo ser una de las partes múltiplo de 10. En este primer estadio, se dispone de una representación canónica de un máximo de 9 elementos por columna, lo que se traduce en una incapacidad para practicar cambios, para representar de forma múltiple un número mediante bloques o para solucionar una operación que requiera tales cambios. En el segundo estadio, se producen dos grandes avances en la conquista de la representación del número: se reconoce la equivalencia de las diversas particiones y se inserta la forma no canónica, la cual allana el acceso a la comprensión de los reagrupamientos. Esta nueva representación del número tiene lugar en dos fases: a) las representaciones múltiples de la cantidad se establecen empíricamente con objetos y el procedimiento de conteo, y b) se introduce el esquema de intercambio, que es una ampliación del esquema parte-todo; de modo que permite las representaciones múltiples de una cantidad sin depender del conteo. Por último, el análisis del tercer estadio se centra en la sintaxis de la aritmética escrita, interesándose, al igual que Brown y Burton (1978), en los errores sistemáticos de los niños derivados de la aplicación de algoritmos erróneos. Advierte que los niños siguen las reglas de sintaxis o procedimiento, pero ignoran o violan la semántica o significado de los esquemas de intercambio, de parte-todo y del valor relativo de los números. Deduce, en consecuencia, que el aprendizaje de la aritmética debería orientarse hacia el desarrollo de estructuras de conocimiento que proporcionen una justificación semántica a los procedimientos de reagrupamiento ejecutados por escrito. La facilidad con que los niños adquieren el conocimiento semántico cuando trabajan con materiales concretos (p.e., bloques de Dienes) la induce a proponer un método de enseñanza, que les haga ver la correspondencia entre los pasos realizados en el cálculo con materiales concretos y las operaciones de cálculo escrito: la "mapping instruction" (Resnick, 1981). La competencia matemática de los niños de este último estadio se diferencia notoriamente de los primeros intentos de utilización de los conceptos generales, ya que ahora poseen un esquema mucho más abstracto: el esquema de cambio. Este esquema interpreta las llevadas como análogas a los intercambios, de modo que hay una columna de partida que se hace más pequeña en 1 elemento y una columna receptora que se hace más grande en 10 elementos.

En una línea de trabajo muy próxima, Riley, Greeno y Heller (1983) presentan tres modelos que proporcionan una detallada descripción acerca de los cambios que se producen en el niño para llegar a comprender las relaciones entre las cantidades mismas, así como la utilización de las representaciones en la resolución de los problemas. El modelo más evolucionado (el modelo 3), introduce precisamente la relación parte-todo, facilitando la identificación de las acciones apropiadas en orden a resolver los diversos tipos de problemas propuestos.

Los trabajos realizados por Bermejo y colaboradores (Bermejo y Lago, 1986; Bermejo y Rodríguez, 1986; a y b próxima aparición) siguen una orientación próxima al enfoque de Resnick. Estos autores analizan el papel desempeñado por el esquema parte-todo, sea en tareas de conservación de cantidades continuas y discontinuas, sea en la resolución de problemas aditivos verbales y numéricos. En un estudio llevado a cabo en torno a la resolución de problemas verbales aditivos, con niños de 2.º de Preescolar y de 1.º de EGB, se encuentra que las estrategias utilizadas por estos niños dependen tanto del tipo de enunciado, como de la edad de los mismos. Se advierte además que no todos aquellos niños que resuelven correctamente los problemas de combinación son igualmente capaces de solucionar los de igualación. En efecto, en los problemas de combinación resulta eficiente la estrategia de contar todos los elementos, puesto que la incógnita es el todo. Por el contrario, en las tareas de igualación es necesario determinar qué elementos del problema constituyen las partes y cuál el todo, para poder, de este modo, construir la representación inicial del problema. En este último tipo de tareas las estrategias más utilizadas son el "match-separate" y el "add-on". Sin embargo, los niños mayores utilizan en ambos tipos de problemas procedimientos más abstractos, tales como estrategias basadas en la composición y descomposición de los números. En cuanto a los tipos de errores cometidos por los niños, cabe destacar que existen notorias diferencias entre los problemas de combinación y los de igualación: en los primeros son frecuentes los errores de cómputo, mientras que en los segundos proliferan los debidos a deficiencias en la construcción de una representación adecuada. Este fenómeno puede interpretarse principalmente en función del lugar ocupado por la incógnita y, paralelamente, de la existencia de una proposición de relación que los niños interpretan como de asignación, dando como respuesta uno de los valores del texto. En estas investigaciones el esquema parte-todo parece revelarse como un instrumento válido para explicar los diversos comportamientos mostrados por los niños, sobre todo en las etapas iniciales de adquisición de los conceptos numéricos. Igualmente, constituye un firme fundamento del que pueden extraerse orientaciones educativas que se ajusten a las capacidades de los niños y les proporcione el adecuado punto de partida, tanto para la adquisición de una sólida base conceptual, como para la flexibilidad pertinente en el conocimiento heurístico.

La utilización del esquema parte-todo con fines educativos prácticos puede ejemplificarse en la investigación llevada a cabo por De Corte y Verschaffel (1981). Estos autores utilizan un diseño en el que se incluyen experimentos de exploración y de enseñanza, siguiendo las pautas marcadas por la psicología soviética de la instrucción. En el primero de ellos, encontraron que los escolares de segundo grado presentaban dificultades sobre todo en la representación del problema, siendo menos frecuentes los errores en la llamada "fase técnica" o de ejecución. Por otra parte, rechazan dos de las explicaciones más extendidas sobre el fracaso de los niños: una basada en los transtornos de aprendizaje, y la segunda que supone, en conexión con la teoría piagetiana, que los niños no han alcanzado todavía el desarrollo cognitivo necesario. Al contrario, consideran que estos errores se deben fundamentalmente a deficiencias metodológicas de la enseñanza recibida, ya que sólo promueven estrategias para resolver problemas específicos y aislados. En consecuencia, su programa de enseñanza experimental tiene como objetivo principal dotar al niño de un conocimiento conceptual matemático relevante, equipándolo de técnicas heurísticas generales y de un conjunto de acciones de control. A juicio de estos autores, el esquema parte-todo es adecuado para representar las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del problema, o, dicho de otro modo, es un medio adecuado y eficiente para representar los datos del problema e inferir las operaciones aritméticas oportunas que hay que aplicar. Por todo ello, en su experimento de enseñanza instruyen a los niños en torno al concepto de igualdad y de la relación parte-todo, a fin de que aborden el problema de un modo analítico y reflexivo, intentando hacer explícitas las relaciones existentes entre los diversos componentes. Y, en efecto, los resultados se ajustan a sus expectativas, ya que los niños instruidos de este modo reducen notoriamente el número de errores en la fase de representación o "pensamiento".

En esta misma óptica, Carpenter, Hiebert y Moser (1983) enseñan a niños de primer grado a efectuar el análisis de los problemas basándose en la relación parte-todo. Tras el período de instrucción fijado, observan que los escolares resuelven todos los problemas de resta mediante el uso de una sola estrategia: el "separating", que consiste en separar el conjunto menor del mayor, contando el resto. Al interpretar estos datos, surgen al menos dos explicaciones: bien que los niños han entendido una única interpretación de la resta, bien que han comprendido la posibilidad de utilizar múltiples estrategias y optan por la más sencilla. La valoración de esta alternativa plantea un segundo interrogante, debido a que, según estos autores, los niños parecen concebir ahora la resolución de la tarea como si se tratase exclusivamente de la elección de la operación adecuada, mostrando escaso o ningún interés por el análisis semántico del problema. Concluyen que la instrucción prematura en la representación de los problemas mediante ecuaciones puede alentar un análisis superficial de los mismos, conduciendo frecuentemente a los niños a la utilización de la operación inadecuada.

LOS MODELOS PROPUESTOS

El conocimiento matemático de los niños se ha convertido recientemente en un prometedor objeto de estudio dentro del enfoque del procesamiento de la información. Como señala Siegler (1983), son al menos tres las razones que lo justifican: 1. la comprensión de las matemáticas puede ser modelada con precisión, de tal forma que estos modelos proporcionan, por una parte, un marco comparativo que permite evaluar el conocimiento de los niños y, por otra, favorecen la comprensión del proceso evolutivo. 2. La investigación puede contribuir eficazmente en la práctica educativa, ya que algunos de los programas propuestos han sido utilizados por maestros para evaluar el conocimiento matemático de sus alumnos. 3. La comprensión de las matemáticas es un campo que permite el modelado tanto de las representaciones como de los procesos que el niño realiza. Esta pertienencia de nuestro tema ha favorecido probablemente la formación de modelos entre los psicólogos cognitivos (De Corte y Verschaffel, 1985; Greeno, Riley y Heller, 1983; Kintsch y Greeno, 1985; Siegler y Robinson, 1982).

El modelo integrativo desarrollado por Siegler y Robinson (1982), se inscribe en el marco de la teoría del procesamiento de la información, aunque pretende superar dos de las críticas más frecuentes imputadas a esta orientación: su aplicación a fenómenos de rango muy limitado y la falta de explicaciones globalizadoras, que dan lugar a una visión un tanto dispersa y atomista. En un intento, pues, de evitar estas limitaciones, Siegler y Robinson (1982) tratan de inferir las representaciones y procesos que originan las tareas de conteo, comparación de magnitudes, adición y conservación del número, para poder integrarlas en un único modelo de comprensión conceptual del número. Nos limitaremos a exponer únicamente los modelos que explican la adquisición del conteo en los niños. Con tal objetivo, presentamos, a continuación, algunos de sus hallazgos más interesantes en dos experimentos: conteo abstracto y conteo a partir de un valor distinto de uno. En el primero, extraen la existencia de tres patrones de comportamiento en dicha habilidad: 1. el grupo de los niños cuyo conteo no sobrepasa el valor 19; 2. el grupo cuyo rango de conteo se sitúa entre 20-99; 3. y el grupo de niños que sobrepasan la centena. En el segundo observan que los niños del primer grupo no eran capaces de proseguir el conteo si se les propone un número superior a su competencia; los del segundo casi siempre alcanzaban el siguiente "9", pero no conocían la conexión interdecena, y, finalmente, los del tercer grupo exhibían un claro conocimiento de la estructura intradecena, pero dudaban en las conexiones interdecena. Los resultados en la tarea de conteo abstracto confirman la tesis de que los niños son capaces de detectar y utilizar la estructura que aparece en la secuencia de numerales a partir de veinte, pero no la que existe a partir de trece (Ginsburg, 1977). Esto discrepa claramente del planteamiento de Riley, Greeno y Gelman (1984), según el cual los números están ligados, simplemente, por la relación de "siguiente" y no por estructuras concretas.

Siegler y Robinson (1982) atribuyen un carácter crítico al desarrollo secuencial del conteo, ya que los niños no aprehenderán la estructrua inherente a los numerales más avanzados de la secuencia en tanto no dominen los valores precedentes. En consecuencia, proponen tres modelos de ejecución. *Modelo I:* alude al conocimiento subyacente en los procedimientos de conteo en niños que cuentan hasta veinte. En este modelo, la representación sólo incluye conexiones de "siguiente" y no una estructura concreta. El niño parte del número uno si no sele pide que lo haga a partir de otro valor y prosigue secuencialmente con los números siguientes hasta donde alcanzan sus recursos de conteo (ver figura n.º 1). Una vez que éstos le fallan, eligen arbitrariamente cualquier número o dan por finalizado el conteo. Este primer modelo se corresponde con el modelo SC (Simulación del Conteo) formulado por Greeno, Riley y Gelman (1984), según el cual existe una lista ordenada de numerales almacenada en memoria siendo designado uno de los numerales como el "primero" y los restantes elementos se vinculan por una relación de "siguiente". La recuperación del "siguiente" numeral es más sencilla que la recuperación del siguiente objeto que ha de ser contado. Esto se debe a que Greeno y col. asumen

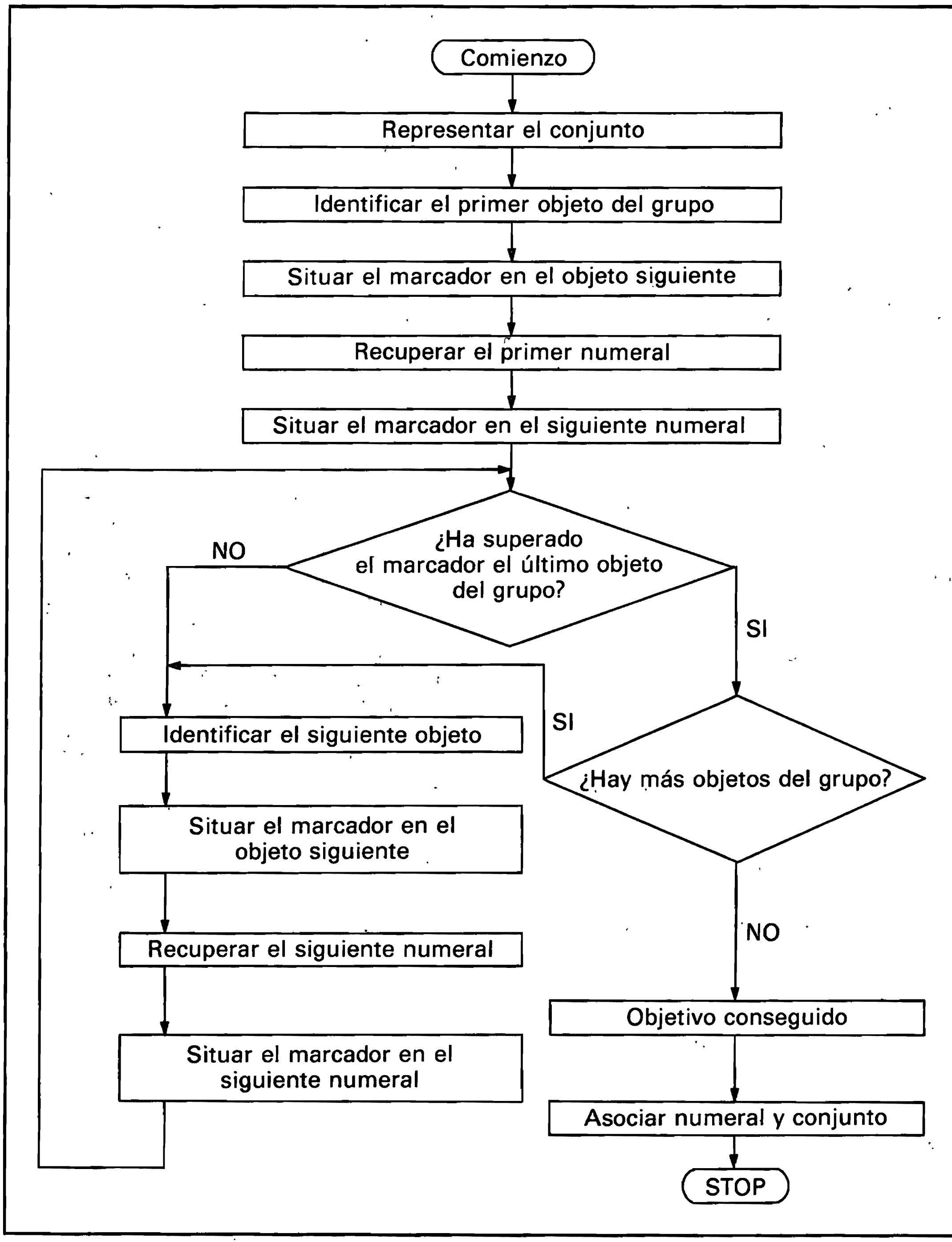

Fig. 1. Modelo para el conteo (variante de Greeno, Riley y Gelman, 1984, p. 133)

que la lista de numerales puede ser recuperada de la memoria sirviéndose de los indicios proporcionados por los numerales previamente utilizados. A juicio de estos autores, este modelo puede considerarse como una estructura de conocimiento inicial, de modo que sólo puede utilizarse el primer numeral para efectuar la entrada en la lista, consiguiendo que otros numerales sirvan de "puntos de entrada" mediante un aprendizaje posterior. El *Modelo II* es adecuado para los niños que cuentan entre 20-99. Dentro de la representación, los números pueden ser etiquetados como miembros de dos listas: la lista de repetición de dígitos que incluye los números entre 1 y 9 y la lista de aplicabilidad de la regla generativa.La función de la primera es designar los números que pueden conexionarse a los nombres de las decenas, así como la de evitar la necesidad de conexiones individuales entre cada par de números sucesivos; la segunda indica los lugares en los que puede utilizarse la regla generativa, es decir, la concatenación del nombre de la decena con cada uno de los miembros de la lista de dígitos. El *Modelo III* tan sólo incorpora dos cambios en relación al anterior, la adición de la lista de centenas y el perfeccionamiento de las dos listas anteriormente descritas.

En la terminología de Wilkinson (1984), Siegler y Robinson (1982) plantean la existencia de una regla, procedimiento o algoritmo, que se recupera como un todo de la memoria, por lo que será utilizado de modo consistente en las distintas situaciones. Además, el proceso evolutivo influye por medio de leves modificaciones del algoritmo incompleto, introduciendo mejoras en la representación infantil. En efecto, Siegler y Robinson explican que los errores propios de las primeras etapas ensombrecen los tiempos de reacción posteriores debido a que operan procesos cada vez más perfectos sobre representaciones fundamentalmente similares. Por otra parte, Fuson, Richards y Briars (1982) observan, en contraposición a Siegler y Robinson (1982), que durante el período de adquisición de la secuencia de numerales, se manifiestan tres formas diferentes de conteo en una misma ejecución: una primera convencional, ya que forma parte del conocimiento que el niño tiene de la secuencia de numerales; una segunda estable y no convencional, y una final no estable, con un patrón poco consistente a lo largo de las sucesivas repeticiones de la secuencia. Estos autores rechazan el Modelo I de Siegler y Robinson (1982), debido a que las formas no estables de ejecución no son producciones aleatorias como pretende el modelo, aunque tampoco sean enteramente regulares. Las secuencias producidas por el Modelo I constan de dos partes: a) una convencional y estable constante a lo largo de los diversos ensayos y b) una parte final que difiere de ensayo a ensayo. Fuson y col. (1982), sin embargo, obtienen resultados contrarios a ambas predicciones; encontrando que las partes finales de las formas estables y convencionales varían entre los distintos ensayos y las no estables no son completamente aleatorias. En consecuencia, exponen la necesidad de incluir un proceso probabilístico. La misma objeción se mantiene en relación al Modelo II, puesto que este modelo postula que cuando un niño desconoce el orden en que se siguen las decenas, opta por una elección aleatoria mientras que Fuson y col. (1982) encuentran que existen decenas "favoritas" y menos favoritas dependiendo de los sujetos.

Por otra parte, son asimismo numerosos los esfuerzos por determinar el conocimiento y los procesos involucrados en la resolución de problemas aritméticos de suma y resta elementales. Aún cuando los diversos autores (De Corte y Verschaffel, 1985; Greeno, Riley y Gelman, 1984; Kintsh y Greeno, 1985; Riley, Greeno y Heller, 1983, entre otros) convienen en que las dificultades de los niños estriban fundamentalmente en la construcción de una representación inicial adecuada del problema y no en la elección o en la ejecución de la operación pertinente, y desarrollan sus modelos dentro del mismo marco teórico, difieren, no obstante, en cuanto a los aspectos que destacan. La figura n.º 2 muestra un ejemplo de modelo de la suma. Riley y col. (1983) hacen hincapié en el procesamiento semántico y en la relación entre conocimiento conceptual y de procedimiento en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas aritméticos elementales. Proponen tres modelos diferentes según el grado de dependencia respecto a las representaciones de la información contenida en el problema y según el poder de los procesos inferenciales implicados en los esquemas.

Kintsch y Greeno (1985) afirman que no basta con atender a las estructuras de conocimiento y a los procedimientos de resolución, sino que deben identificarse los aspectos del "input" textual, que regu-

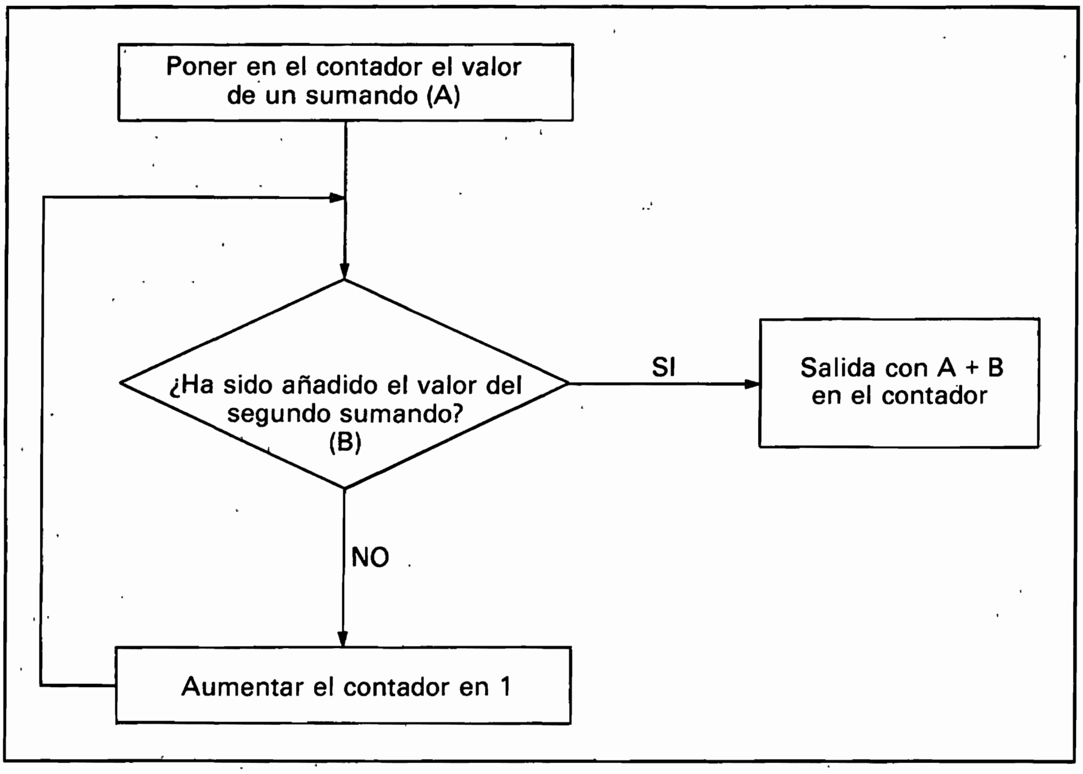

Fig. 2. Modelo para la adición (variante de Groen y Parkman, 1972)

lan la utilización de tales estructuras conceptuales y de procedimiento. De este modo, su modelo contiene una representación dual: un texto base proposicional y un modelo del problema más abstracto, actuando en la transición de una a otra las estrategias desencadenadas por las proposiciones del texto base. Dichas estrategias pueden precisar de la concurrencia de esquemas de alto orden, a fin de establecer relaciones entre los conjuntos y asignar los papeles correspondientes en el modelo del problema. En esta misma línea, aunque sin un análisis tan pormenorizado del texto, se encuentra el trabajo de De Corte y Verschaffel (1985). Estos autores, aun cuando comparten con Riley y col. (1983) la importancia asignada al procesamiento semántico, exponen la necesidad de un componente conceptual adicional, que denominan "esquema del problema verbal" (WPS). Este componente adicional pone de relieve que la actividad de interpretar y analizar el texto verbal no sólo está influenciada por el contenido del mismo, sino también por su naturaleza y el contexto en el cual el niño se enfrenta con el problema. Es decir, en su opinión, se precisa: a) un conocimiento acerca del papel e intención de los problemas; b) un conocimiento relativo a su estructura, de manera que le permita orientarse desde un principio hacia ciertos conceptos y relaciones del texto base proposicional, y c) un conocimiento implícito de ciertas reglas, suposiciones y acuerdos inherentes, que posibilitan una correcta interpretación de las ambigüedades e imprecisiones del problema.

Para concluir este apartado, baste señalar que si bien algunos modelos hacen hincapié en la representación de las estructuras y procesos cognitivos que conducen a la solución del problema (Greeno, Riley y Gelman, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983; Siegler y Robinson, 1982); otros, por el contrario, canalizan su esfuerzo sobre todo hacia los mecanismos y procesos de interpretación del texto verbal y la conexión de éstos con la representación y resolución del problema (De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985).

CONCLUSIONES

Tras lo expuesto a lo largo de estas páginas podemos concluir que la investigación en torno a la adquisición de las operaciones aritméticas elementales se centra fundamentalmente en el estudio de los procedimientos de la aritmética informal y la resolución de problemas verbales numéricos. Ambas líneas de investigación convergen en la delimitación de los procesos cognitivos implicados en los distintos niveles de competencia mostrada por los niños.

Respecto a los estudios sobre la aritmética informal, el conteo ha acaparado la mayor atención de los autores. A pesar de ello, no existe una firme evidencia de que esta habilidad sea un elemento facilitador para adquirir un concepto de número plenamente desarrollado. Así, cuando los niños utilizan procedimientos de conteo más avanzados, como, por ejemplo, comenzar el conteo a partir de un valor cardinal sin necesidad de recurrir al recuento de los numerales anteriores, se ha observado (ver Davydov y Andronov, 1980) que ignoran que el valor cardinal de partida comprende a todos los elementos anteriores. Igualmente existen dudas respecto al conocimiento subyacente a las respuestas infantiles emitidas ante la pregunta "¿cuántos?" en los diseños experimentales, ya que parece tratarse de una regla aprendida, que se ejecuta sin comprender el contexto referencial o el problema concreto planteado (Fuson, Pergament, Lyons y Hall, 1985). Sin embargo, esto no debe interpretarse como un regreso a la postura de Piaget y Szeminska (1941), como hemos dicho anteriormente. Al contrario, son numerosos los estudios que abogan por el papel desempeñado por las habilidades numéricas básicas en la adquisición de las operaciones lógicas. Así se muestra, por ejemplo, en los trabajos de entrenamiento (Clements, 1984; Case, 1982; Saxe, 1979; Young y McPherson, 1976) basados en los modelos de las operaciones lógicas (seriación y clasificación) y en los modelos de conteo, aunque los datos obtenidos no permitan hacer conclusiones definitivas al respecto. Además, esta nueva aproximación ha permitido superar la vieja concepción de los procesos de todo o nada en la explicación del desarrollo, defendiendo que los niños disponen de un bagaje conceptual que se incrementa progresivamente a lo largo de la evolución.

En cuanto a los estudios desarrollados sobre la resolución de problemas verbales numéricos, los esfuerzos recientes se han centrado en la creación de modelos de simulación para describir los procesos cognitivos subyacentes. Si bien este intento resulta claramente atractivo, los datos empíricos no son todavía concluyentes, ya que no existen elementos de juicio para considerar de modo terminante que alguno de los modelos propuestos se adecue perfectamente a las ejecuciones de los niños. Así, por ejemplo, en el estudio de Riley y col. (1983) un porcentaje significativo de niños realizan ejecuciones que no son explicadas por los modelos. Asimismo, Carpenter y Moser (1983) señalan que la secuencia propuesta por algunos modelos sobre la habilidad de resolución de problemas, no se corresponde con los datos obtenidos en un estudio longitudinal (Carpenter y Moser, 1983). Es también frecuente en estos modelos centrarse en los procedimientos informales de conteo y no en determinar cuál es el efecto de la instrucción formal sobre la estructura cognitiva del niño. De los modelos expuestos, tan sólo Resnick (1983) se ocupa del desarrollo del conocimiento conceptual y de procedimiento bajo la influencia de la enseñanza formal. El resto de los modelos atienden fundamentalmente a las competencias matemáticas que poseen los niños, sin necesidad de recibir instrucción para ello. En estas investigaciones se omite, pues, el estudio de la dinámica de los procesos de transición, dependientes de los recursos que la instrucción formal proporciona. Tal desconocimiento hace difícil la elaboración de nuevos programas de enseñanza basados en dichos modelos.

Otro de los aspectos estudiados en relación a los problemas verbales aritméticos se refiere a su jerarquización en función del grado de dificultad, generalmente atribuida al lugar ocupado por la incógnita. Sin embargo, no parece que este dato sea el único responsable de que unos problemas resulten más difíciles que otros. La estructura semántica del problema y el grado de familiaridad con el mismo, pueden hacer que problemas en los que la incógnita se mantiene en el mismo lugar, se diferencien, no obstante, en cuanto al grado de complejidad. A este respecto, De Corte, Verschaffel y De Win (1985) y Hudson (1983) han señalado que la reformulación de problemas explicitando claramente las relaciones semánticas entre las cantidades, mejora el proceso de representación y ejecución de los mismos. Asimismo la familiaridad con el problema, hace que se creen expectativas asociadas a determinadas formulaciones, de manera que cuando aparece una formulación desconocida o poco familiar, dicha expectativa no se produce, formando frecuentemente una representación inicial adecuada.

En consecuencia, sería aconsejable que en la práctica educativa se formulen los problemas de manera que se expliciten claramente las relaciones semánticas entre las cantidades propuestas. Igualmente, habría que evitar los programas que tienden a formar expertos en un tipo específico de tareas, fomentándose por el contrario la práctica en la resolución de problemas de diferentes características. También hay que hacer constar la importancia que se está concediendo al papel desempeñado por la capacidad de procesamiento de información y su posible incidencia en la resolución de problemas matemáticos elementales (Case, 1982; Kintsch y Greeno, 1985; Romberg y Collis, 1980). En este sentido, Kintsch y Greeno consideran que esta habilidad cognitiva básica puede ser la fuente de errores cometidos por los niños en algunas ocasiones y no su falta de conocimiento. Finalmente, queremos señalar que las investigaciones futuras en este área deberán esforzarse no sólo en completar el acervo de conocimientos existentes en torno a los mecanismos y procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de estas nociones, sino también, y de modo especial debido a la indigencia de estudios, de la aplicación e inserción pertinente de estos conocimientos en el ámbito escolar.

Referencias bibliográficas

Arnett, L. D.: Counting and adding. **American Journal of Psychology,** 1905, **16,** 327-336.

Baylor, G. W. y Gascon, J.: An information-processing theory of the development of weight seriation in children. **Cognitive Psychology,** 1974, **6,** 1-40.

Bermejo, V. y Lago, M.O.: La adquisición de la adición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos. **II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación,** Madrid, junio, 1986.

Bermejo, V. y Rodríguez, P.: El esquema parte-todo en la conservación y adición. **II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación.** Madrid, junio, 1986.

Bermejo, V. y Rodríguez, P.: Fundamentos cognitivos de la adición. **Psiquis.** 1987, **3,** 103-112. (a)

Bermejo, V. y Rodríguez, P.: Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Próxima aparición. 1987 (b)

Brainerd, C. J.: Mathematical and behavioral foundations of number. **Journal of General Psychology,** 1973, **88,** 221-281.(a)

Brainerd, C. J.: The origins of number concepts. **Scientific American,** 1973, **228,** 101-109.(b)

Brainerd, C. J.: The evolution of number. Presentado en la **Fourth Interdisciplinary Conference on Structural Learning,** 1973. (c)

Brainerd, C. J.: The origins of the number concept. Nueva York; Praeger Publishers, 1979.

Brown, A. L.: Knowing when, where, and how to remenber: A problem of metacognition. En Glaser, R. (Ed.), **Advances in instructional psychology.** Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1978.

Brown, R.: Introduction. En Society for Research in Child Development (Ed.), **Cognitive development in childen.** Chicago: University of Chicago Press, 1970.

Brown, R. y Burton, R.: Diagnostic models for procedural in basic mathematical skills. **Cognitive Science,** 1978, **2,** 155-192.

Browne, C. E.: The psychology of simple arithmetic processes: A study of certain habits of attention and association. **American Journal of Psychology,** 1906, **17,** 1-37.

Brownell, W. A.: The development of children's number ideas in the primary grades. Supplementary Educational Monographs, n.º 35, Chicago: University of Chicago Press, 1928.

Buhswell, W. A. y Judd, H.: Summary of educational investigations relating to arithmetic. **Supplementary Educational Monographs,** 1925, **27,** 65.

Carpenter, T. y Moser, J.: The development of addition and subtraction problem-solving skillls. En Carpenter, T.; Moser, J., y Romberg, T. (Eds.), **Eddition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Carpenter, T. y Moser, J.: The acquisition of addition and subtraction concepts. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes.** Nueva York: Academic Press, 1983.

Carpenter, T.; Hiebert, J. y Moser, J.: The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction problems. **Educational Studies in Mathematics,** 1983, **14,** 55-72.

Case, R.: Implications of developmental psychology for the design of instruction.En Glaser, R.; Lesgold, J.; Pellegrino, J. y Fokkema, J. (Eds.), **Advances in instructional psychology.** Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1978.

Case, R.: General developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in arithmetic. En Carpenter, T.; Moser. J. y Romberg, T. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Clements, D. H.: Training effects on the development and generalization of piagetian logical operations and knowledge of number. **Journal of Educational Psychology, 1984, 5,** 766-776.

Cobb, P. y Steffe, L.: The constructivist rersearcher as teacher and model builder. **Journal of Research in Mathematical Education,** 1983, **14,** 83-94.

Collis, K.: The structure of learned outcomes: A refocusing for mathematics learning. En Carpenter, T.; Moser, J. y Moser, J. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Chi, M. T. H.: Knowledge structures and memory development. En Siegler, R. S. (Ed.), **Children's thinking: What develops?** Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1978.

Davydov, V. V. y Andronov, V. P.: Condiciones psicológicas del origen de las acciones mentales. **Infancia y Aprendizaje,** 1980, **10,** 21-36.

De Corte, E. y Verschaffel, L.: Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. **Journal of Mathematical Behavior,** 1981, **73,** 775-779.

De Corte, E. y Verschaffel, L.: Beginning first graders initial representation of arithmetic work problems. **Journal of Mathematical Behavior,** 1985, **4,** 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. y De Win, L.: Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. **Journal of Educational Psychology,** 1985, **77,** 460-470.

Flavell, J. H.: On cognitive development. **Child Development,** 1982, **53,** 1-10.

Frege, G.: Die grundlagen der arithmetik. Breslau; Marcus, 1984.

Fuson, K.: The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results. En Carpenter, T.; Moser, J. y Romberg, T. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Fuson, K.; Pergament, G. G.; Lyons, B. G. y Hall, J. W.: Children's conformity to the cardinality rule as a function of set size and counting accuracy. **Child Development,** 1985, **56,** 1429-1436.

Fuson, K. y Richards, J.: Children's construction of the counting numbers: From a spew to a bidirectional chain. Artículo no publicado, 1979.

Fuson, K.; Richards, J. y Briars, D. J.: The acquisition and elaboration of the number word sequence. En Brainerd, C. J. (Ed.), **Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development.** Nueva York: Springer-Verlag, 1982.

Gelman, R.: Logical capacity of very young children: Number invariance rules. **Child Development,** 1972, **43,** 371-383.

Gelman, R.: Accessing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. **British Journal of Psychology,** 1982, **73,** 209-220.

Gelman, R. y Gallistel, C.: The child's understanding of number. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1978.

Gelman, R. y Meck, E.: Preschoolers counting: Principles before skill. **Cognition, 1983, 13,** 343-359.

Gentner, D.: Evidence for the psychological reality of semantic components: The verbs of possesion. En Norman, D. A. y Rumelhart, R. D. E. (Eds.), **Explorations in cognition.** San Francisco: Freeman, 1975.

Ginsburg, H. P.: Children's arithmetic: The learning process. Nueva York: Van Nostrand, 1977.

Ginsburg, H. P.; Kossan, N.E.; Schwartz, R. y Swanson, D.: Protocol methods in research on mathematical thinking. En Ginsburg, H. P. (Ed.), **The development of mathematical thinking.** Nueva York: Academic Press, 1983.

Greeno, J.; Riley, M. y Gelman, R.: Conceptual competence and children's counting. **Cognitive Psychology,** 1984, **16,** 94-143.

Greco, P., Grize, J. B.; Papert, S. y Piaget, J.: Problemses de la construction du nombre. París: P. U. F., 1960.

Groen, G. y Parkman, J. M.: A chronometric analysis of simple addition. **Psychological Review,** 1972, **79,** 329-343.

Groen, G. y Resnick, L. B.: Can preschool children invent addition algorithms? **Journal of Educational Psychology,** 1977, **69,** 645-652.

Hatano, G.: Learning to add and subtract: A Japanase perspective. En Carpenter, T.; Romberg, J. y Moser, T. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Hudson, T.: Correspondences and numerical differences between disjoint sets. **Child Development,** 1983, **54,** 84-90.

Kintsch, W. y Greeno, J.: Understanding and solving word arithmetic problems. **Psychological Review,** 1985, **92(1),** 109-129.

Miller, S. A.: A nonverbal assessment of Piagetian concepts. **Psychological Bulletin,** 1976, **83,** 405-430.

Nesher, P.: Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En Carpenter, T.; Moser, J. y Romber, T. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Piaget, J.: Apprentissage et structures de la connaissance. París: P.U.F., 1974.

Piaget, J.: Piaget's theory. En Mussen, P. H. (Ed.), **Handbok of child psychology.** Nueva York: John Wiley & Sons, 1983.

Piaget, J. y Szeminska, A.: Le génese du nombre chez l'enfant. Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1941.

Resnick, L. B.: Instructional psychology. **Annual Review of Psychology,** 1981, **32,** 659-704.

Resnick, L. B.: A developmental theory of number understanding. En Ginsburg, H. (Ed.), **The development of mathematical thinking.** Nueva York: Academic Press, 1983.

Riley, M. S.; Greeno, J. y Heller, J. I.: Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En Ginsburg, H. (Ed.), **The development of mathematical thinking.** Nueva York: Academic Press, 1983.

Romberg, T. A. y Collis, K. A.: Cognitive level and performance on addition and subtraction problems. En **Proceeding of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.** Berkeley, CA, 1980.

Rozin, P.: The evolution of intelligence and access to the cognitive unconscious. En Sprague, J. y Epstein, A. (Eds.), **Progress in psychobiology and physiological psychology.** Nueva York: Academic Press, 1976.

Russell, B.: The principles of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

Saxe, G. B.: Developmental relations between notational counting and number conservation. **Child Development,** 1979, **50,** 180-187.

Saxe, G. B.: Culture and the development of numerical cognition: Studies among the Oksapmin of Papua New Guinea. En Brainerd, Ch. J. (Ed.), **Children's logical and mathematical cognition.** Nueva York: Springer-Verlag, 1982.

Siegler, R. S.: Developmental sequences within and between concepts. **Monographs of the Society for Research in Child Development,** 1981, **46** (Nº 189).

Siegler, R.: Information processing approaches to development. En Mussen P. H. (Ed.), **Handbook of child psychology.** Nueva York: John Wiley & Sons, 1983.

Siegler, R. y Robinson, M.: The development of numerical understandings. En Reese, H. y Lipsitt, L. (Eds.), **Advances in child development and behavior** (Vol. 16), Nueva York: Academic Press, 1982.

Starkey P. y Gelman, R.: The development of addition and subtraction abilities prior to formal school in arithmetic. En Carpenter, T.P.; Moser, J. M. y Romberg, T. A. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Steffe, L. P.; Thompson, P. W. y Richards, J.: Children's counting in arithmetical problem solving. En Carpenter, T.; Moser, J. y Romberg, T. (Eds.), **Addition and subtraction: A cognitive perspective.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1982.

Steffe, L. P.; von Glaserfeld, E.; Richards, J. y Cobb, P.: Children's counting types: Philosophy, theory, and applications. Nueva York: Praeger Scientific, 1983.

Stein, N. L. y Trabasso, T.: What's in a story: Critical issues in comprehension and instructions. En Glaser, R. (Ed.), **Advances in the psychoogy of instruction** (Vol. 2). Nueva Jersey: L.E.A., 1981.

Trabasso, T.: The role of memory as a system in making transitive inferences. En Kail, Jr., R. V. y Hagen, J. W. (Eds.), **Perspectives on the development of memory and cognition.** Hillsdale, Nueva Jersey: Erlbaum, 1977.

Whitehead, A. N. y Russell, B.: Principia mathematica. (Vols. 1-3). Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.

Wilkinson, A.: Counting strategies and semantic analysis as applied to class inclusion. **Cognitive Psychology,** 1976, **8,** 64-85.

Wilkinson, A.: Theoretical and methodological analysis of partial knowledge. **Developmental Review,** 1982, **2,** 274-304 (a).

Wilkinson, A.: Partial knowledge and self-correction: Developmental studies of quantitative concept. **Developmental Psychology,** 1982, **18,** 874-891 (b).

Wilkinson, A.: Children's partial knowledge of the cognitive skills for counting. **Cognitive Psychology,** 1984, **16,** 28-64.

Young, A. W. y McPherson, J.: Ways of making number judgments and children's understanding of quantity relations. **British Journal of Educational Psychology,** 1976, **46,** 328-332.